МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ГІРНИЧИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра транспортних систем і технологій

ТРАНСПОРТНІ СИСТЕМИ ГІРНИЧИХ ПІДПРИЄМСТВ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

«Вимірювання фізичних величин, планування та обробка результатів експерименту»

студентами напряму підготовки 6.050301 Гірництво

Дніпропетровськ
НГУ
2015

Коптовець О.М.
Транспортні системи гірничих підприємств. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт студентами напряму підготовки 6.050301 «Гірництво» / О.М. Коптовець; Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2015. – 22 с.

Автори:
Коптовець О.М., д-р техн. наук, проф.

Затверджено до видання редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (протокол № 6 від 02.06.2015) за поданням методичної комісії напряму підготовки 6.050301 «Гірництво» (протокол № 2 від 02.06.2015).

Методичні матеріали призначено для самостійної роботи студентів напряму 6.050301 «Гірництво» під час підготовки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Транспортні системи гірничих підприємств».

Подано методичні вказівки до виконання лабораторних робіт Викладено методичні та теоретичні основи інформаційно-вимірювальної техніки, планування експерименту та статистичного аналізу його результатів. Викладено стандартні правила обробки, показники точності та форми представлення результатів вимірювання.

Рекомендації орієнтовано на активізацію виконавчого етапу навчальної діяльності студентів.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри транспортних систем і технологій, д-р техн. наук, проф.. Л.Н. Ширін

ЗМІСТ

1. Вимірювання фізичних величин

1.1. Фізичні величини

Признаками функціонування обладнання та для характеристики технічної ефективності його служать фізичні величини, які називають параметрами технічного стану.

Фізична величина – це властивість, в якісному відношенні загальна багатьом фізичним об'єктам, в кількісному відношенні індивідуальна для кожного об'єкту. Наприклад маса, довжина, температура, період коливань та ін.

Розмір фізичної величини – це кількісний вміст в даному об'ємі властивості, відповідної поняттю "фізична величина". Не слід замість терміну "розмір" застосовувати термін "величина", наприклад "величина сили", "величина тиску" і т.п. Оскільки ці властивості (сила, тиск) самі є величинами.

Значення фізичної величини – це оцінка фізичної величини у вигляді деякого числа прийнятих для неї одиниць. Наприклад, 10 м – значення довжини деякого тіла, 5 кг – значення маси деякого тіла. Абстрактне число, що входить в значення фізичної величини (10 та 5 в приведених прикладах), називається числовим значенням.

Істинне значення фізичної величини – це значення величини, яке ідеальним чином відображало б в якісних і кількісних відносинах відповідну властивість об'єкту. Дійсне значення фізичних величин, як правило, невідомо.

Дійсне значення фізичних величин є значення величини, знайдене експериментальним шляхом і яке настільки наближається до дійсного значення, що для даної мети може бути використано замість нього.

1.2. Завдання вимірювань

Вимірюванням фізичної величини називається знаходження її значення дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Вимірювання можливо лише в тому випадку, якщо для кожної фізичної величини вибрані відповідні одиниці. В результаті вимірювання ми дізнаємося, в скільки разів вимірювана величина більше або менше відповідної величини, прийнятої за одиницю.

Одиниця фізичної величини – це фізична величина, якій за визначенням привласнено числове значення, рівне 1.

Ніяке вимірювання не може бути виконано абсолютно точно. Тому в результаті вимірювань ми завжди отримуємо значення фізичної величини з деякою погрішністю. Таким чином, в задачу вимірювань входить не тільки знаходження значення фізичної величини, але також і оцінка допущеної при вимірюванні погрішності.

Прямим вимірюванням називають вимірювання, при якому шукане значення величини знаходять безпосередньо з дослідних даних. Наприклад, вимірювання маси на рівноплечих вагах, температури – термометром.

Непряме вимірювання - вимірювання, при якому шукане значення величини знаходять на підставі відомої залежності між нею і величинами, що піддаються прямим вимірюванням. Наприклад, знаходження щільності тіла по його масі і геометричним розмірам.

1.3. Типи похибок

Систематичними називають похибки, величина яких однакова у всіх вимірюваннях, що проводяться одним і тим же методом за допомогою одних і тих же приладів. Вони викликаються групою факторів, які діють однаковим чином при багаторазовому повторенні одних і тих же вимірювань. До їх числа відноситься погрішність вимірювальних приладів, яка визначається класом точності приладу.

Електровимірювальні прилади характеризуються класом точності в межах від 0,05 до 4. Менш точні прилади позначення класу не мають. Максимальні погрішності, що надаються вимірювальними лінійками, мікрометрами і іншими приладами, наносяться на самому приладі або указуються в паспорті.

Систематичні похибки описаного типу не можуть бути виключені, але їх найбільше значення відоме і його може бути враховано. Наприклад, якщо на приладі вказаний клас точності 0,5, то це означає, що показання приладу правильні з точністю 0,5% від всієї діючої шкали 150 В. Тобто прилад дає похибку у вимірюванні напруги не більше 0,75 В. Якщо вимірюючи напругу набули значення 65,3 В, то слід писати:

$$U = (65{,}3 \pm 0{,}75)\ \text{В}.$$

Випадковими називають такі похибки, величина яких різна навіть для вимірювань, виконаних однаковим чином. Випадкові хибки зобов'язані своїм походженням ряду причин, дія яких не однакова в кожному досліді і не може бути врахована. При повторних вимірюваннях однієї й тієї ж величини змінює показники випадковим чином.

Правила визначення випадкових похибок вивчаються в теорії похибок. Математична обробка результатів вимірювань буде приведена нижче.

Грубі похибки або промахи є результатом недостатньої уваги експериментатора. Наприклад, невірний запис показань приладу, похибки при виборі зразків і т.п. Виявляють промахи і виключають їх з розгляду при обробці результатів вимірювання.

Практично виключити багато невідомих систематичних похибок дозволяє прийом рандомізації (перетворення систематичної помилки у випадкову). При цьому вимірювання слід організувати так, щоб постійний фактор, що впливає на результат вимірювань, діяв випадковим чином.

Правила вимірювань:

– якщо величина систематичної похибки більше величини випадкової похибки, властивої даному методу, то досить виконати вимірювання один раз (одноразові вимірювання);

– якщо випадкова похибка є визначальною, то вимірювання слід проводити кілька разів (вимірювання з багаторазовими спостереженнями). Число вимірювань доцільно збільшувати до тих пір, поки випадкова помилка середнього арифметичного не стане менше систематичної похибки, з тим щоб останнє визначало остаточну похибку результату.

Одноразові вимірювання виконуються за допомогою засобів з відомими метрологічними характеристиками якщо допускається похибка вимірювання, яка досягає подвоєного середнього квадратичного відхилення складової погрішності засобів вимірювання.

1.4. Деякі відомості по теорії ймовірностей і випадкових похибок

Якщо кожне вимірювання дає відмінні від інших вимірювань результати, то маємо справу з ситуацією, коли випадкова похибка відіграє суттєву роль. При цьому всі оцінки точності вимірювання можна зробити лише з деякою ймовірністю.

Звичайно приймається, що похибки підкоряються нормальному закону розподілу:

– похибки вимірювань можуть приймати безперервний ряд значень;

– при великому числі спостережень похибки однакової величини, але різного знаку, зустрічаються однаково часто;

– частота появи похибок зменшується із збільшенням її величини.

Найбільш ймовірною оцінкою дійсного значення вимірюваної величини є середнє арифметичне (постулат Гауса).

Для характеристики величини випадкової похибки необхідно задати величину самої похибки або довірчий інтервал та величину довірчої ймовірності.

Довірчою ймовірністю серії спостережень називається ймовірність того, що дійсне значення x знаходиться усередині деякого інтервалу $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$, а сам інтервал називається довірчим.

Довірча ймовірність знаходиться по значеннях

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\sigma_{\bar{x}}},$$

де $\sigma_{\bar{x}}$ - дисперсія середнього арифметичного значення x.

Практичне значення мають три величини довірчої ймовірності: $\Delta x = \sigma_{\bar{x}}$ що відповідає довірчій ймовірності 0,68, $\Delta x = 2\sigma_{\bar{x}}$ – 0,95, $\Delta x = 3\sigma_{\bar{x}}$ – 0,997.

Функції розподілу похибок для малих вибірок (n<30) відрізняються від нормального закону розподілу. Проте для обчислень можна користуватися нормальним законом розподілу, якщо для розрахунку довірчого інтервалу ввести коефіцієнт Стьюдента, який є функцією довірчої ймовірності γ і числа вимірювань n:

$$t_{\gamma,\mathrm{n}} = \frac{\Delta x}{S_{\bar{x}}},$$

де S - середнє квадратичне відхилення середнього x.

У тих випадках, коли закон розподілу похибок відрізняється від нормального, довірчу ймовірність можна оцінити, скориставшись так званою нерівністю Чебишева, яка отримана для довільного закону розподілу і має загальний характер

$$P(|\bar{x}-x| > \gamma\sigma) < \frac{1}{\gamma^2}.$$

При обробці результатів ставлять наступні задачі:

– знайти дійсне значення вимірюваної величини за результатами повторних вимірювань;

– оцінити погрішність одержаного значення;

– оцінити достовірність і надійність результату;

– визначити необхідну кількість вимірювань для досягнення заданої точності. Для однократних вимірювань придатний прилад, що володіє малою випадковою складовою похибки при співвідношенні

$$\frac{\Delta x_к}{2Sx} = 2{,}5 - 3{,}5,$$

де $\Delta x_к$ – ціна поділки приладу; Sx – нормально розподілена випадкова похибка. Для вимірювання з багаторазовими спостереженнями необхідно використовувати прилад більш чутливий, володіючий значною випадковою складовою погрішності при виконанні співвідношення.

1.5. Порядок обробки результатів вимірювань
При прямих вимірюваннях.

1) Кожне спостереження занести в таблицю, в якій також розмістити результати обчислень.

2) Середнє арифметичне вибірки

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

3) Відхилення

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}.$$

4) Квадрати відхилень Δx_i^2.

5) Середньоквадратичне відхилення спостережень

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}{n-1}}.$$

6) Середньоквадратичне відхилення результату вимірювань

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

При необхідності виконують перевірку гіпотези про нормальність розподілу результатів спостережень. Якщо нормальність гарантована фізикою явища або статистикою багатьох попередників та її можна не перевіряти по статистичних критеріях, але будувати розподіл все одно корисно, щоб вчасно помітити грубі похибки методики.

При $n<15$ перевірка гіпотези не проводиться, оскільки не існує надійних критеріїв. При $15<n<50$ розроблені критерії перевірки гіпотези з рівнем значущості від 10 до 2%. При $50<n<100$ існують критерії високої надійності.

7) Задаючись значенням довірчої ймовірності, знайти коефіцієнт Стьюдента $t_{\gamma n}$ для даного числа вимірювань n.

8) Знайти максимальну погрішність

$$\Delta x = t_{\gamma,n} \cdot S_{\bar{x}}.$$

9) Визначити наявність грубих похибок (оцінка анормальності результатів спостережень):

- знайти $U_{min} = \dfrac{(\bar{x} - x_{min})}{S_x}$, $U_{max} = \dfrac{(x_{max} - \bar{x})}{S_x}$;

- по кількості вимірювань n і рівню значущості $\alpha = 1 - \gamma$ знайти U_α

- порівняти U_{max}, U_{min}, U_α, якщо U_{max} або U_{min} більше за U_α, то результат відкинути і виконати п.п. 1-8.

10) Врахувати систематичну погрішність

$$\Delta x = \sqrt{\Delta_c^2 + (t_{\gamma,n} \cdot S_{\bar{x}})^2}.$$

11) Одержане числове значення результату округляють.

12) Відносна погрішність вимірювання

$$k_V = (\frac{\Delta x}{\bar{x}}) \cdot 100\%.$$

13) Результати вимірювання

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad (k_V, \%).$$

При непрямих вимірюваннях.

Послідовність обчислень попередня. Довірча вірогідність γ задається для всіх вимірюваних величин одна і та ж. Погрішність результату непрямого вимірювання визначається по формулах відповідно до конкретного виду функціональної залежності:

$$\Delta X = \left[\left| \frac{\partial X}{\partial A} \right| \Delta A + \left| \frac{\partial X}{\partial B} \right| \Delta B + \left| \frac{\partial X}{\partial C} \right| \Delta C + \ldots \right]$$ (число вимірювань мале);

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial A} \right)^2 S_{\bar{A}}^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial B} \right)^2 S_{\bar{B}}^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial C} \right)^2 S_{\bar{C}}^2 + \ldots}$$ (число вимірювань велике).

Відносна погрішність

$$k_V = (\frac{\Delta f}{f}) \cdot 100\%.$$

Результат вимірювання

$$f(A, B, C, \ldots) = f(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \ldots) \pm \Delta f \quad (k_V, \%).$$

Приводимо погрішність для деяких частинних функцій:

1) $X = A + B, \Delta A + \Delta B, \dfrac{\Delta A + \Delta B}{A + B}, \sqrt{S_{\bar{A}}^2 + S_{\bar{B}}^2}, \sqrt{\dfrac{S_{\bar{A}}^2 + S_{\bar{B}}^2}{A + B}}$;

2) $X = A - B, \Delta A + \Delta B, \dfrac{\Delta A + \Delta B}{A - B}, \sqrt{S_{\bar{A}}^2 + S_{\bar{B}}^2},\ \sqrt{\dfrac{S_{\bar{A}}^2 + S_{\bar{B}}^2}{A - B}}$;

3) $X = A \cdot B, A \cdot \Delta A + B \cdot \Delta B, \dfrac{\Delta A}{A} + \dfrac{\Delta B}{B}, \sqrt{\bar{A}^2 S_{\bar{A}}^2 + \bar{B}^2 S_{\bar{B}}^2},\ \sqrt{\left(\dfrac{S_{\bar{A}}}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{S_{\bar{B}}}{B}\right)^2}$;

4) $X = \dfrac{A}{B}, \dfrac{A \cdot \Delta A + B \cdot \Delta B}{B^2}, \dfrac{\Delta A}{A} + \dfrac{\Delta B}{B}, \dfrac{1}{B^2}\sqrt{S_{\bar{A}}^2 + \left(\dfrac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)^2 S_{\bar{B}}^2},\ \sqrt{\left(\dfrac{S_{\bar{A}}}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{S_{\bar{B}}}{B}\right)^2}$;

5) $X = A^{\alpha}, \alpha A^{\alpha-1} \cdot \Delta A, \alpha \dfrac{\Delta A}{A}, \alpha A^{\alpha-1} \cdot S_{\bar{A}},\ \alpha \dfrac{S_{\bar{A}}}{A}$;

6) $X = \sqrt[\alpha]{A}, \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\Delta A}{A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}, \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\Delta A}{A}, \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{S_{\bar{A}}}{A^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}},\ \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{S_{\bar{A}}}{A}$;

7) $X = \sin A, \Delta A \cdot \cos A, \Delta A \cdot ctgA, S_{\bar{A}} \cdot \cos A,\ S_{\bar{A}} \cdot ctgA$;

8) $X = \cos A, \Delta A \cdot \sin A, \Delta A \cdot tgA, S_{\bar{A}} \cdot tgA,\ S_{\bar{A}} \cdot \sin A$;

9) $X = tgA, \dfrac{\Delta A}{\cos^2 A}, \dfrac{2\Delta A}{\sin 2A}, \dfrac{S_{\bar{A}}}{\cos^2 A},\ \dfrac{2S_{\bar{A}}}{\sin 2A}$;

10) $X = \ln A, \dfrac{\Delta A}{A}, \dfrac{2\Delta A}{A \ln A}, \dfrac{S_{\bar{A}}}{A},\ \dfrac{S_{\bar{A}}}{A \ln A}$;

11) $X = e^A, e^A \cdot \Delta A, \Delta A, e^A \cdot S_{\bar{A}},\ S_{\bar{A}}$.

1.6. Правила округлення і точність обчислень

Величину випадкової помилки ми завжди визначаємо достатньо грубо. Наприклад, при 10 вимірюваннях *Sx* визначається з погрішністю більше 30%. Тому при округленні помилки слід дотримуватися наступного правила:

– при n = 10 в значенні S_{10} необхідно залишати одну значущу цифру, якщо вона більше 3, і дві значущі цифри, якщо перша з них менше 4;

– при n = 25 в значенні S_{25} необхідно залишати дві значущі цифри;

– при n > 25 - залишати три значущі цифри.

Для округлення результату вимірювання необхідно знати похибку і проводити округлювання до першої сумнівної цифри.

Наприклад, одержаний результат

$$3752{,}28 \pm 31{,}6,$$

який має вірні цифри 37, сумнівну 5, невірні 2,28, які необхідно відкинути, зберігаючи в погрішності цифру старшого розряду.

Отже, результат повинен бути записаний таким чином:

$$3750 \pm 30.$$

Точність обчислень повинна бути приблизно на порядок вище сумарної точності вимірювань.

Список рекомендованої літератури

1. ГОСТ 8.417-81ГСИ. Единицы физических величин. Государственный комитет стандартов СМ СССР. – М., 1981. – 18 с.

2. ГОСТ 16263-70. Метрология. Термины и определения. Государственный комитет стандартов СМ СССР. – М., 1970. – 33 с.

3. ГОСТ 8.009-72. Метрологические характеристики средств измерений. Государственный комитет стандартов СМ СССР. – М., 1972. – 18 с.

4. ГОСТ 11.004-74. Проверка определения оценок и доверительных значений для параметров нормального распределения. Государственный комитет стандартов СМ СССР.– М., 1974 – 19 с.

5. ГОСТ 8.011-72. Показатели точности измерения и форм представления результатов измерений. Государственный комитет стандартов СМ СССР. - М,, 1972. – 5 с.

6. ГОСТ 11.002-73. Правила оценки анормальности результатов наблюдений. Государственный комитет стандартов СМ СССР. – М., 1973. – 24 с.

7. ГОСТ 11.006-74. Правила проверки согласия опітного распределения с теоретическим. Государственный комитет стандартов СМ СССР. – М., 1974. – 23 с.

8. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Вища школа, 2011. – 432 с.

9. Сена Л.А. Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1977. – 336 с.

10. Туригин А.М. Электрические измерения неэлектрических величин. - Л.: Энергия, 1975. – 577 с.

11. Штремель М.А. Инженер в лаборатории. – М.: Металлургия, 1983. – 128 с.

2. Планування і обробка результатів експерименту

Проведення експерименту вважається "мистецтвом, якому можна навчитися, але якому не можна навчити". Твердження справедливе, якщо під експериментом мається на увазі загальний процес наукового дослідження і отримання нових даних. Хоча мистецтву робити відкриття не можна навчитися, навчити мистецтву підготовки до відкриттів все ж таки можна.

Визначити поняття "науковий експеримент" скільки-небудь задовільно не можна. Проте легко привести приклади як добре поставлених експериментів, так і експериментів в якомусь сенсі поганих. Часто експериментатори прагнуть лише до того, щоб зібрати дані і зробити виводи, не звертаючи уваги на те, яким чином ці дані були зібрані.

Таблиця 2.1

Традиційна схема зважування трьох об'єктів /8/.

Номер об'єкту	*A*	*B*	*C*	Результати зважування
1	-1	-1	-1	y_0
2	+1	-1	-1	y_1
3	-1	+1	-1	y_2
4	-1	-1	+1	y_3

Позначення + 1 указує, що об'єкт зважування A, B або C покладений на ваги; -1 – відсутній на вагах; y_0 – визначає нульову точку вагів.

Маса об'єкту

$$A = y_1 - y_0.$$

Дисперсія результатів зважування

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\{y_1 - y_0\} = 2\sigma^2\{y\},$$

де $\sigma\{y\}$ – похибка зважування.

Тут приведений традиційний однофакторный експеримент, при якому вивчається поведінка кожного фактора окремо. Таке розуміння наукового експерименту є слідством сильних абстракцій і спрощень (концепція причинно-наслідкових зв'язків Бекона-Гершеля-Мілля), в результаті до об'єкту, що вивчається, підходять як до окремого ізольованого явища, відволікаючись від зворотних зв'язків і складних взаємин.

Таблиця 2.2

Матриця планування зважування трьох об'єктів /8/

Номер об'єкту	A	B	C	Результати зважування
1	+1	-1	-1	y_0
2	-1	+1	-1	y_1
3	-1	-1	+1	y_2
4	+1	+1	+1	y_3

Точність зважування збільшується в 2 рази:

$$A = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2}, \quad B = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{2}, \quad C = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{2};$$

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\left\{\frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2}\right\} = \frac{4\sigma^2\{y\}}{4} = \sigma^2\{y\}.$$

Таким чином, приділяючи більшу увагу плануванню експерименту лише для порівняно простих об'єктів, можна зробити цінніші виводи.

Мета планування експериментів – отримати більше інформації при менших витратах, чим це можна зробити традиційними методами. При цьому можна виділити наступні етапи.

2.1. Збір і аналіз апріорної інформації

При необхідності проводяться контрольні або відсіваючі експерименти. Виконується для ухвалення обґрунтованих рішень на всіх подальших етапах роботи.

2.2. Постановка завдання

Ретельним аналізом апріорної інформації про об'єкт, що вивчається, важливо з'ясувати всі точки зору, щоб встановити мету експерименту. Але тільки конкретна постановка завдання дозволяє досягти її рішення.

2.2.1. Вибір вхідних змінних (факторів)

Набір факторів визначає стан об'єкту, що вивчається.

Фактори можуть бути кількісними (температура, швидкість ковзання, шлях, тиск і тому подібне), рівням яких відповідає числова шкала, і якісними (конструкція і матеріал фрикційної пари, тип локомотива і досвід машиніста). Рівням таких факторів не відповідає числова шкала і їх порядок не грає ролі.

Основна вимога до факторів – керованість. Під керованістю розуміється встановлення потрібного значення фактора (рівня) і підтримка його протягом всього досвіду

Некеровані фактори (температура тертя, вологість навколишнього повітря і ін.) розглядається на подальших етапах планування експерименту.

Фактори повинні бути незалежні один від одного. У протилежному випадку необхідно спрощувати завдання і відкидати такі фактори або застосовувати перетворення, що забезпечують їх незалежність.

2.2.2. Вибір вихідних змінних

Це реакції (відгуки) на дію вхідних змінних. Необхідно прагнути розглядати випадки з одним вихідним параметром. При виникненні завдань з багатьма параметрами доцільно для кожного з них побудувати свій план експерименту.

Вихідний параметр є кількісною характеристикою мети дослідження.

При вирішенні екстремальних завдань, пов'язаних з визначенням оптимальних умов протікання процесу, вихідні змінні називають параметрами оптимізації.

Залежно від поставленої мети дослідження вихідні параметри можуть бути:

– техніко-технологічними (зносостійкість, коефіцієнт тертя, механічні та інші властивості матеріалу і конструкції вузла);

– техніко-економічними (надійність, довговічність машини і так далі);

– економічними (собівартість, рентабельність і так далі).

Вихідні параметри повинні бути простими, з ясним фізичним смислом і універсальними. Наприклад, краще приймати безрозмірний коефіцієнт тертя, чим силу тертя. В цьому випадку не тільки повніше і точніше визначається мета дослідження, але і полегшується інтерпретація результатів експериментального дослідження.

Точність фіксації рівнів факторів повинна бути вище, ніж точність вимірювання вихідного параметра.

2.2.3. Вибір математичної моделі

Модель для опису досліджуваного процесу залежить від знань про об'єкт, цілей дослідження і математичного апарату.

Наприклад, зміна температури нагріву в часі підкоряється лінійному логарифмічному закону, коливальні процеси описуються тригонометричними функціями і так далі.

Якщо вид функції невідомий, то можливе її представлення у вигляді розкладання в степеневі ряди. За певних умов таке розкладання в многочлен корисно для всіх безперервних функцій [6].

Приклад постановки однієї з задач дослідження характеристик колодочно-колісного гальма шахтних локомотивів:

– визначити сумісний вплив швидкості ковзання V і гальмівного натиснення K, вплив кожного з них при постійному значенні іншого і встановити ступінь цього впливу на величину коефіцієнта тертя φ.

На формальному рівні завдання формулюється таким чином:

– отримати уявлення про функцію відгуку $\varphi = f\,(K, V, KV)$.

У загальному вигляді модель залежності між змінними шукали у вигляді

$$\bar{\varphi} = a_0 + a_1 K + a_2 V + a_3 KV\ .$$

2.3. План експерименту та його реалізація

2.3.1. Вибір плану експерименту

Повний факторний експеримент – це перша ланка в ланцюзі планів, послідовне створення і вдосконалення яких привело до розробки математичних методів моделювання складних процесів. Під повним факторним експериментом розуміють такий експеримент, в якому реалізуються всі можливі комбінації рівнів факторів, що не повторюються. Якщо число факторів k, а число рівнів кожного з них S, то план експерименту носить назву типу S^k, а число комбінацій відповідає кількості незалежних дослідів

$$N = S^k.$$

Необхідне число рівнів факторів вибирають перш за все залежно від порядку математичної моделі. Воно повинне бути, принаймні, на одиницю більше, ніж порядок рівняння. Тому плани типу 2^k називають планами першого порядку.

Загальне число коефіцієнтів рівняння регресії моделі без урахування взаємодій вищого порядку, ніж парні, буде рівне

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1.$$

Для моделі з квадратичними членами вибирають плани з числом рівнів $k > 2$. Такий тип планування описаний, наприклад, в /3, 4, 8, 9/.

Якщо прийнята лінійна модель і взаємодії факторів вважаються незначущими, то з метою зниження кількості дослідів в експерименті застосовують дробове планування /1/.

Факторні експерименти типу 2^k, у тому числі і дробові, володіють властивостями оптимальності при побудові лінійної моделі. Тому за інших рівних умов слід віддавати перевагу лінійним планам. Якщо адекватність лінійної моделі при цьому не буде доведена, тільки потім слід приступати до планів вищого порядку.

2.3.2 Вибір області експериментування та інтервалів варіювання факторів

Даний етап неформалізованих рішень виконується на основі інтуїції і досвіду дослідника. Можна привести тільки деякі рекомендації.

Зазвичай за основний рівень приймають такий стан процесу, який вважається якнайкращим за умовами стійкості, оптимізації і інше. Область експериментування можна розглядати як область зміни факторів в умовах експлуатації.

Величина інтервалу варіювання повинна бути більше подвоєної квадратичної помилки фіксації факторів. З іншого боку інтервал варіювання не повинен бути дуже великим за умовами апроксимації.

2.3.3. Побудова матриці планування

Щоб спростити і уніфікувати запис умов дослідів і полегшити обробку експериментальних даних застосовують кодування рівнів факторів.

При використанні багаточленного полінома як математичної моделі фактори кодують по формулі:

$$X_i = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i},$$

де X_i – кодове значення i -го фактора, x_i – натуральне поточне значення *і-го* фактора; x_{i0} – основний рівень фактора; Δx_i – напівінтервал варіювання

$$\Delta x_i = \left(x_{i_{max}} - x_{i_{min}}\right)/2.$$

Після кодування рівні факторів приймають значення -1 та +1. Для якісних факторів одному рівню надають значення -1, іншому +1, при цьому порядок кодування не грає ролі. Некеровані фактори в традиційному експерименті або утримуються на одному рівні, або ними нехтують, вважаючи їх вплив незначним. Частку їх впливу на результати дослідів в даному випадку оцінити неможливо.

У активному експерименті застосовують рандомізацію умов експерименту, тобто випадковий порядок проведення дослідів. Прийом дозволяє перевести некеровані фактори у випадкові величини і враховувати їх вплив. При цьому відпадає необхідність в їх стабілізації.

Зазвичай порядок випробувань рандомізують за допомогою таблиць випадкових чисел /2/

Таблиця 2.3

Стандартна матриця планування для повного факторного плану типу 2^2

№ досвіду	x_0	x_1	x_2	$x_1\,x_2$	y_1	y_2	y_3	$\bar{y}$
1	+1	-1	-1	+1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	$\bar{y}_1$
2	+1	+1	-1	-1	y_{21}	y_{22}	y_{23}	$\bar{y}_2$
3	+1	-1	+1	-1	y_{31}	y_{32}	y_{33}	$\bar{y}_3$
4	+1	+1	+1	+1	y_{41}	y_{44}	y_{43}	$\bar{y}_4$

Для зручності при розрахунках коефіцієнтів моделі в матрицю планування вводять фіктивну незалежну змінну X_0, яка при всіх дослідах приймає тільки одне значення +1, а також стовпці взаємодії чинників X_1X_2, результати паралельних дослідів y_{ij} і середнє значення $\overline{y}_i$. Тут стовпці j – значення факторів, рядки i – умови дослідів.

Необхідна кількість паралельних дослідів залежно від довірчої вірогідності P, відношення необхідної довірчої точності $\varepsilon > |y - a|$ середньоквадратичної помилки $S(y)$ представлено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Кількість дослідів /6/

Оцінка точність $\varepsilon / S(y)$	P					
	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99	0,999
3,0	2	2	3	4	5	6
2,0	2	3	4	5	6	8
1,0	4	5	6	7	12	18
0,5	7	10	14	19	32	51

Для вирішення багатьох технічних завдань досить прийняти
$\varepsilon / S(y) = 1{,}0 - 3{,}0$; P = 0,90 – 0,95.

Практика показує /11/, що число спостережень повинне бути більше кількості коефіцієнтів регресії принаймні в 6 – 7 разів.

На закінчення визначають витрати часу на проведення експерименту, кількість випробовуваних зразків або витрату матеріалів.

2.3.4. Реалізація плану експерименту.

Якщо експеримент правильно рандомізований по некерованих факторах, то він може продовжуватись тривалий час, у тому числі і з перервами. Єдина мета експерименту на даному етапі – вимірювання фізичних величин.

Вимірювання слід організовувати так, щоб погрішність результату цілком визначалася систематичною помилкою вимірювань, яка зазвичай задається погрішністю вимірювального приладу. Всі рекомендації на етапах планування експерименту направлені на те щоб випадкова похибка результату була незначна в порівнянні з систематичною похибкою. На даному етапі цим положенням слід керуватися таким чином.

Погрішність вимірювальних приладів δ, яка визначається класом точності приладу або іншими аналогічними обставинами, повинна не більше ніж у декілька разів перевершувати середню квадратичну погрішність $S(y)$. Реально це співвідношення /5/

$$\delta \geq 0{,}2S(y).$$

При менших значеннях δ для істотного зменшення ролі випадкової похибки буде потрібно значне число вимірювань.

На основі ГОСТ 13500-68 засоби вимірювання залежно від способу позначення класу точності підрозділяються на п'ять груп. Для приладів електровимірювань клас точності виражається

$$\left(\delta / y_k\right) \cdot 100\% ,$$

де y_k – кінцеве значення шкали приладу. При цьому слід прагнути до того, щоб вимірювана величина y займала всю шкалу приладу, тоді

$$y_k = y_{max} .$$

Вибирають прилад з ціною ділення

$$\Delta y_k = (5 \ldots 7) S(y))$$

для одноразових вимірювань (якщо прийнята гіпотеза про однорідність дисперсії план експерименту паралельні досліди не передбачає);

$$\Delta y_k = (1 \ldots 2) S(y)$$

для вимірювань з багатократними спостереженнями (плани з паралельними дослідами).

Для зменшення помилок при знятті відліку рекомендується:

– запис результату вимірювання проводити в діленнях шкали;

– відмовитися від приладів з ненумерованою шкалою і використовувати прилади з цифровим відліком;

– застосовувати автоматичну реєстрацію (наприклад цифропечать, осциллографування).

Особлива увага повинна бути приділене набору однорідних досліджуваних зразків в кожному з дослідів. У разі неоднорідності план експерименту можна розбити на окремі блоки або використовувати плани, що дозволяють провести дослідження в умовах неоднорідності /10/.

Загальний принцип досягнення найбільшої ефективності засобів вимірювання – узгодження їх вхідних і вихідних опорів.

На практиці робота перетворювача з ємкісним внутрішнім опором Z_0 на навантаження з індуктивним опором $Z_н$ або навпаки уникається із-за різкої поблизу резонансу залежності чутливості від коливань частоти. Решта всіх випадків (активне R_0 на ємкісне Z_0, індуктивне $Z_н$. на активне $R_н$) підкоряються загальному правилу:

$$R_н - R_0)$$

для генераторних перетворювачів (з вихідною величиною Е.Д.С. або струм);

$$R_н - \frac{R_0}{3}$$

для параметричних перетворювачів (з вихідний величиною у вигляді зміни R, C або L).

Правило не вимагає узгодження R_0 і $R_н$ з високим ступенем точності. Практично узгодження забезпечується при

$$R_н / R_0 = 3 \ldots 5$$

для генераторних перетворювачів;

$$R_н / R_0 = \frac{1}{3}(1.5 \ldots 2))$$

для параметричних перетворювачів.

Слід мати на увазі, що в енергетиці використовується свій принцип, який здійснюється при

$$R_0 << R_{н}.$$

Але такі цілі малоефективні при вимірюванні.

При зміні вимірюваної величини в часі повинні бути зняті амплітудно-частотна і фазо-частотна характеристики вимірників (наприклад безпосередньо вольтметром і фазометром періодичних процесів, ватметром випадкових процесів).

Якщо є підстави нехтувати динамічними погрішностями, то виходять з того, щоб основна частота досліджуваного процесу в 5-10 разів була менше частоти власних коливань пружного чутливого елементу. Це ж правило відноситься і до інших елементів вимірювальної системи.

2.4. Обробка результатів експерименту

Коректна обробка результатів за допомогою всіх видів статистичного аналізу (дисперсійного, кореляційного, регресійного) можлива при виконанні наступних передумов /7/:

–результати спостережень досліджуваного параметра y_i (i = 1, 2., N) представляють незалежні величини, розподілені по нормальному закону;

–відсутня лінійна кореляція між факторами;

– випадкова функція $y = f(t)$ відтворна і стаціонарна для достатньо великого проміжку часу;

– функція відгуку утворює безперервну поверхню в багатовимірному просторі;

– оцінка дисперсії паралельних дослідів повинна бути однорідна.

Перша передумова зазвичай виконується, якщо на процес робить вплив велика кількість чинників. Крім того, ряд інших законів розподілу при певних погрішностях можна привести до нормального.

Відтворюваність і стаціонарність випадкової функції визначається не тільки властивостями досліджуваного процесу, але і однорідністю матеріалів і зразків, умовами проведення експерименту, Функція відгуку утворює безперервну поверхню в локальній області багатовимірного простору. Ця передумова виконується в тому випадку, якщо правильно вибрана область визначення факторів.

Таким чином, виконання ряду передумов досягається на початкових етапах планування експерименту. Виконання окремих передумов необхідно перевірити на даному етапі.

Вид статистичного аналізу визначається цілями досліджень. За даною ознакою виконується класифікація завдань. Наприклад, завдання по виділенню істотних факторів (для вирішення доцільно використовувати плани дисперсійного аналізу), оптимізація параметрів процесу (послідовні плани дисперсійного і регресійного аналізу).

2.4.1. Перевірка однорідності дисперсій паралельних дослідів.

Скористаємося можливостями матриці планування (табл. 2.3).

Середнє значення по паралельних дослідах

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}. \qquad (2.1)$$

Дисперсія кожного досліду і середня квадратична похибка відповідно складають

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right); \qquad (2.2)$$

$$S_i = +\sqrt{S_i^2}\,. \qquad (2.3)$$

Перевірка однорідності дисперсій за допомогою критерію Кохрена

$$G = \frac{S_{i\,max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}, \qquad (2.4)$$

де i – номер рядка матриці плану, i = 1, 2..., N; $S^2_{i_{max}}$ – максимальна дисперсія по (2.2).

Гіпотеза про однорідність дисперсії не відкидається, якщо експериментальне значення критерію Кохрена G не перевищить табличного /2/ з числом мір свободи $(n – 1)$ і N.

При однорідності дисперсій S_i^2 можна визначити дисперсію відтворюваності і похибку всього експерименту

$$S^2(y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S_i^2, \qquad (2.5)$$

$$S(y) = \sqrt{S^2(y)}\,. \qquad (2.6)$$

2.4.2. Побудова математичної моделі з перевіркою її на адекватність.

Коефіцієнти рівняння регресії

$$A_j = \sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i X_{ij}\right)/\,N; \qquad (2.7)$$

$$A_{uj} = \sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i X_{ui} X_{ij}\right)/\,N, \qquad (2.8)$$

де X_{ij} – значення j-*го* чинника в i-ом досліді; u, j – номери факторів, u, j = 0,1,2 (табл. 2.3)

$$j \neq u\,.$$

Перевірка гіпотези про адекватність моделі заснована на розрахунках дисперсії адекватності S_{ag}^2 і критерію Фішера (F – критерію)

$$S_{ag}^2 = \sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 /\, f\,, \qquad (2.9)$$

$$F = S_{ag}^2 \big/ S^2(y), \qquad (2.10)$$

де $\bar{y}$ – розрахункове по рівнянню регресії значення y; f – число мір свободи

$$f = N - p, \tag{2.11}$$

де p – число коефіцієнтів регресії.

Гіпотеза про адекватність не відкидається, якщо експериментальна величина F – критерію не перевищує табличного /2/ значення з числом мір свободи f і $N(n-1)$.

Адекватність лінійного рівняння можна провіряти по різниці значень a_0 і $\bar{y}_0$, отриманих в досліді на нульових рівнях факторів. Якщо величина $(a_0 - \bar{y}_0)$ співвимірна з похибкою експерименту, то використання лінійного рівняння регресії можливе.

Якщо ж різниця велика, то рівняння першого порядку використовувати не можна і необхідно шукати ефекти вищого порядку.

Для перевірки значущості коефіцієнтів регресії розраховують довірчий інтервал

$$\Delta a_j = \pm t_{\alpha, N(n-1)} S(a_j), \tag{2.12}$$

де t - критерій Стьюдента /2/ з числом ступенів свободи $N(n-1)$ для заданого рівня довірчої вірогідності α;

$$S(a_j) = \frac{S(y)}{\sqrt{N(n-1)}}. \tag{2.13}$$

Коефіцієнт значущий, якщо його відносна величина більше довірчого інтервалу.

Незначущі коефіцієнти регресії виключаються і знов проводиться перевірка адекватності моделі із значущими коефіцієнтами.

Адекватність в цілому моделі і окремих її членів можна обгрунтувати методами кореляції.

Для вимірювання інтенсивності зв'язку між залежною змінною і багатьма незалежними факторів застосовується коефіцієнт множинної кореляції

$$R_{y;x_1,x_2,\ldots,x_n} = \sqrt{1 - \frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{\Sigma(y_i - \bar{y}_i)^2}}.$$

Зміряти силу зв'язку між двома величинами за умови "закріплення" впливу інших факторів дозволяють частинні коефіцієнти кореляції:

$r_{yx_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}$; $r_{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n}$, де зліва від крапки вказані величини, для яких визначається r, справа – величини, вплив яких постійний.

Парні коефіцієнти кореляції характеризують зв'язок між двома величинами, якщо їх розглядати ізольовано.

Обчислення r трудомістко, тому слід використовувати розрахунок по стандартних програмах на ЕОМ.

Величина коефіцієнта кореляції змінюється в межах від -1,0 до +1,0. Позитивний коефіцієнт кореляції указує на те, що із зростанням незалежної змінної збільшується пов'язана з нею залежна змінна. Аналогічно негативний коефіцієнт характеризує зростання залежної змінної при зменшенні величини незалежною змінною.

По абсолютному значенню коефіцієнта кореляції розрізняють /7/ високий ступінь кореляції (0,7 – 0,9), помітний (0,3 – 0,7), помірний (0,3 – 0,5), слабкий (0,1 – 0,3), відсутність (0 – 0,1).

У рівнянні регресії фактори відсіваються відповідно до прийнятого ступеня кореляції.

На даному етапі застосування методів кореляції носить значною мірою суб'єктивний характер, проте значно розширює можливості інтерпретації моделі експерименту.

2.4.3. Інтерпретація моделі експерименту

Величина коефіцієнтів регресії a_j – кількісна міра впливу фактора на досліджуваний параметр y. Чим більше коефіцієнт, тим сильніше впливає фактор (указує міру, в якій змінюється y при зміні x на одиницю):

$$\bar{y} = a_0 + a_1 X_1 - a_2 X_2 + a_3 X_1 X_2 . \qquad (2.14)$$

Що стосується вільного члена a_0, то йому неможливо додати фізичний смисл. Він визначає положення точки лінії регресії при $X_i = 0$.

Про характер впливу чинників говорять знаки коефіцієнтів.

Смисл ефекту взаємодії X_1X_2 полягає в тому, що вплив одного фактора залежить від того, на якому рівні знаходиться інший фактор.

Для приведення рівняння (2.14) до вигляду з натуральними значеннями факторів використовують формулу кодування (п. 2.3.3), підставляючи в рівняння (2.14) замість кодових натуральні значення факторів.

Рівняння (2.14) не може бути вирішене щодо членів, які знаходяться в правій частині (зміна ознаки сповільнюється, коли він виступає в кореляційній залежності на правах функції в порівнянні із зміною його на правах аргументу – в цьому полягає закон регресії).

Аналіз коефіцієнтів кореляції дозволяє глибше розкрити внутрішні зв'язки між явищами. Наприклад $r_{23} = 0{,}93$ $r_{23.1} = 0{,}86$, що указує на тісний зв'язок між двома факторами 2 і 3 і цей зв'язок майже не залежить від змінної 1; $r_{13} = 0{,}88$ $r_{13.2} = 0{,}13$ свідчить про жорсткий зв'язок між змінними 1 і 3, якщо їх розглядати ізольовано, але цей зв'язок дуже слабкий при постійному значенні фактора 2.

Коефіцієнт детермінації, який рівний квадрату коефіцієнта кореляції є одиницею вимірювання одночасного впливу, що надається варіаціями досліджуваних факторів. Наприклад

$$R^2_{y \cdot x_1, x_2} = r^2_{yx_1 \cdot x_2} + r^2_{yx_2 \cdot x_1} = 0{,}55 + 0{,}23 = 0{,}78 .$$

Отже, 55% змін y відноситься за рахунок зміни X_1, вивченою у поєднанні з X_2, а 23% в рахунок зміни X_2, тобто загальна мінливість складає 78%, а вплив неврахованих факторів – 22%.

Результат розрахунку досліджуваного параметра по рівнянню регресії представляють у вигляді:

$$y = \bar{y} \pm t_{\alpha, N(n-1)-p} \frac{\sqrt{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}}{\sqrt{N(n-1)}} .$$

Перелік посилань

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В», Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. - М.: Наука, 1976. – 279 с.

2. Большев Л.Н, Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1965. – 474 с.

3. Вознесенский В.А., Ковальчук А.Ф. Принятие решений по статистическим моделям. – М.: Статистика, 1978. – 192 с,

4. Голикова Т.И., Панченко Л,А., Фридман М.З. Каталог планов второго порядка. Ч. 1, 2. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 771 с.

5. Галушко В.Г, Вероятностно-статистические методы на автотранспорте. – Киев: Вища школа, 2010. – 451 с.

6. Евдокимов Ю.А., Колесников В.И., Тетерин А.И. Планирование и анализ экспериментов при решении задач трения и износа. – М.: Наука, 1960. – 228 с.

7. Маркове Е.В., Лысенков А.Н. Планирование эксперимента в условиях неоднородностей. – М.: Наука, 1973. – 87 с.

8. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. – М.: Металлургия, 1981. – 151 с.

9. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. – М.: Наука, 1965. – 340 с.

10. Орнадский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной текинки. - Киев.: Вища школа, 2009. – 431 с.

11. Френкель А.А. Многофакторные корреляционные модели производительности труда. – М.: Экономика, 1966. – 118 с.

Навчальне видання

Коптовець Олександр Миколайович

ВИМІРЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ВЕЛИЧИН, ПЛАНУВАННЯ ТА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт
студентами напряму підготовки 6.050301 Гірництво

Підписано до видання 25.06.2015.
Електронний ресурс. Авт. арк. 2,5.

Видано
у Державному вищому навчальному закладі
«Національний гірничий університет».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.